УДК 651.326

М.А. БЕРЕЖНАЯ, канд. техн. наук, ***Я.Ю. КОРОЛЕВА***, асс. ХНУРЭ.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В КОНЕЧНО-АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЯХ ДИСКРЕТНЫХ УСТРОЙСТВ

Пропонується процедура синтезу характеристичних послідовностей по дереву-спадкоємцю автоматної моделі дискретного пристрою. Отримана найменша верхня межа довжини множин характеристичних послідовностей.

The method deriving of characterizing sequences from state table of automata is proposed. The minimal upper bound of the characterizing sequence length is found.

Введение. Конечные автоматы, как класс математических моделей дискретных динамических систем, являются базовыми идеализированными описаниями технических дискретных устройств (ДУ), языков программирования, алгоритмов и вычислительных процессов, биологических, социально-экономических и других систем. Развитие современных субмикронных технологий, широкое использование СБИС, программируемых логических интегральных схем, систем на одном кристалле определяют перспективы интенсивной компьютеризации всех сфер человеческой деятельности, автоматизации методов получения и обработки информации с использованием сложных кибернетических систем. Известно, что рост сложности современных динамических систем является серьезным ограничением применению конечно-автоматных моделей (КАМ) в качестве моделей таких систем. В последние годы ключевым подходом к решению этой проблемы является иерархическое описание сложных ДУ, разбиение их на отдельные блоки-модули, параллелизм и конвейеризация обработки данных в одномерных и двумерных однородных сетях клеточных автоматов [1,2,6,7,8]. Анализ современных технологий автоматизированного проектирования СБИС показывает, что иерархические КАМ и использование языков *VHDL, Verilog, Statecharts* позволяет эффективно решать проблемы моделирования и верификации сложных объектов проектирования [11,12,13].

В теории экспериментов над автоматами предполагается, что внутренняя структура автоматов неизвестна, и они реагируют на некоторые точно определенные раздражители в виде последовательностей входных символов (стимулов) посредством, точно определенных реакций в виде последовательностей выходных символов. Для формирования входных стимулов используются специфические последовательности, которые находятся в результате анализа автоматных диаграмм КАМ. К таким последовательностям относятся отличительные, синхронизирующие, установочные, характеризующие, переводящие и другие, которые введены и определены различными авторами [2,3,4,5,6,9,10].

Впервые характеристические последовательности были введены Хенни [5]. В дальнейшем они широко использовались при проектировании экспериментов с автоматами в работах отечественных и зарубежных авторов [1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12].

Характеристические последовательности (ХП) являются важным классом входных последовательностей, которыми обладает любой минимальный конечный автомат. В [5] показано, что минимальный автомат с n состояниями имеет не более $(n-1)$ ХП и длина каждой последовательности не превышает $(n-1)$ символов.

Цель статьи. На основе анализа и теоретического обобщения результатов исследований свойств ХП разработать процедуру построения характеристического дерева, позволяющую определить минимальное множество ХП и наименьшую верхнюю оценку длины множества ХП.

Синтез характеристических последовательностей. Определим конечный детерминированный автомат Мили пятеркой $A=<X,Z,Y,d,l>$, где X и Y – соответственно входной и выходной алфавиты, Z – конечное множество состояний, а $d:(Z\times X)\to Z$ и $l:(Z\times X)\to Y$ – соответственно функции переходов и выходов.

Пусть z_a и z_b два различных состояния минимального конечного автомата. Так как $z_a \neq z_b$, то очевидно, всегда можно найти некоторую входную последовательность X_j, приложение которой к автомату с начальным s -множеством $Z'=\{z_a, z_b\}$ позволяет по реакции Y_j на X_j различить состояния z_a и z_b. В терминах теории разбиения множеств [6] вход-выходная последовательность X_j/Y_j индуцирует p_x разбиение начального s -множества состояний автомата по следующему правилу: два состояния z_a и z_b принадлежат одному блоку разбиения p_x, если $l(z_a, X_j) = l(z_b, X_j)$.

Если z_a и z_b принадлежат различным блокам p_x разбиения, то, говорят, что они X_j -различимы, то есть $z_a \neq z_b(p_k)$ и $l(z_a, X_j) \neq l(z_b, X_j)$

Если $Z'=\{z_a, z_b, z_g\}$, $Z'\in Z$ то, рассуждая аналогично, для двух состояний z_b и z_g найти некоторую входную последовательность X_q, которая по реакции Y_q автомата позволяет различить состояния z_b и z_g. Таким образом, приложение к автомату с начальным s -множеством

$Z' = \{z_a, z_b, z_g\}$ множества входных последовательностей $\{X_j X_q\}$ позволяет по реакции автомата идентифицировать его начальное состояние $Z' \in Z$.

Определение 1. Пусть $Z' = \{z_1, z_2, ..., z_r\}$ подмножество состояний минимального автомата А. Множество $X_c = \{x_1, x_2, ..., x_p\}$ будем называть множеством характеристических последовательностей (ХП), если для каждого начального состояния $z_i \in Z'$, реакция на X_c различна, то есть

$$l(z_i, x_1) l(z_i, x_2) ... l(z_i, x_p) \neq l(z_j, x_1) l(z_j, x_2) ... l(z_j, x_p) \quad z_i \neq z_j, \ \forall z_i, z_j \in Z',$$

а исключение любой последовательности из множества X_c не позволяет различить по меньшей мере одно состояние $z_i \in Z'$

Из определения 1 следует, что приложение к автомату с начальным s-множеством $Z' = \{z_1, z_2, ..., z_r\}$ множества последовательностей X_c индуцирует разбиение p_k множества Z состояний автомата, включающего по меньшей мере r блоков, в каждом из которых содержится только одно состояние $z_i \in Z'$. Если $z_i \in Z'$, то множество X_c индуцирует 0-разбиение множества z состояний автомата.

Ниже представлена процедура построения характеристического дерева для нахождения множества характеристических последовательностей, которая является обобщением процедур, представленных в [1,2,8].

Характеристическое дерево есть дерево-преемников, каждая вершина которого отмечается s-множествами различимых состояний-преемников и порождающих их состояний предшественников начального s-множества, которые образуют p-разбиение начального s-множества состояний автомата на подмножества различимых состояний. В характеристическом дереве вершина ранга r является висячей, если: 1) ей поставлена в соответствие группа простых и однородных s-множеств; 2) ей поставлена в соответствие группа s-множеств, совпадающая с группой s-множеств ранга меньше $"k"$ при условии, что попарно совпадают состояния предшественники этих s-множеств; 3) произведение p-разбиений вершины с p-разбиениями вершин ранга r и меньших рангов образуют 0-разбиение.

Для иллюстрации этой процедуры рассмотрим автомат $A1$ (табл. 1). Характеристическое дерево автомата приведено на рис. 1.

В дереве преемников каждая вершина отмечена двумя множествами состояний, взятых в круглые и квадратные скобки. Круглые скобки содержат состояния-преемники, отмеченные одним и тем же выходным символом. В квадратных скобках содержатся состояния-предшественники, индуцирующие соответствующие каждой вершине дерева p-разбиения начального s-множества на блоки различимых подмножеств состояний.

Вершины c, d, g, h являются висячими в соответствии с условием 1 процедуры. Кроме того, на третьем ранге характеристического дерева выполняется условие 3, так как $p_c \times p_g = p_c \times p_h = p(0)$.

Вершина f является висячей в соответствии с условием 2. Четыре вершины характеристического дерева c, d, g, h позволяют образовать 0-разбиения, требуемые для получения множества ХП:

$$p_c \times p_g = p(0),\ p_c \times p_h = p(0),\ p_d \times p_g = p(0),\ p_d \times p_h = p(0)$$

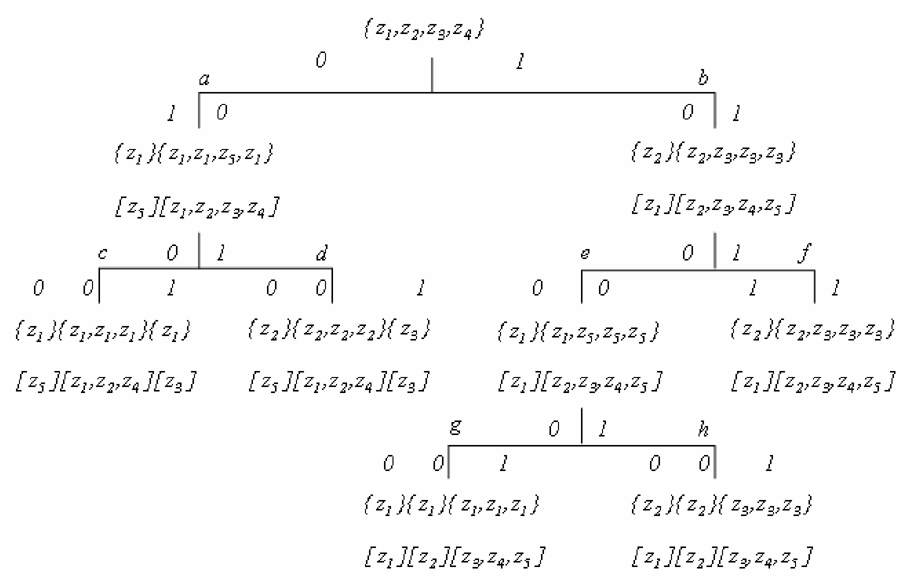

Рис. 1. Характеристическое дерево автомата *A*1

Каждому произведению соответствуют множества ХП:

$$X_c = \{x_1 = 00, x_2 = 100\},\ \{x_1 = 00, x_2 = 101\},\ \{x_1 = 01, x_2 = 100\}.$$

Оценка наименьшей верхней границы длины ХП. Наименьшая верхняя граница длины множества ХП была определена в [9].

Теорема 1 [9]. Для минимального автомата с n состояниями всегда существует не более $(n-1)$ характеристических последовательностей, имеющих в худшем случае следующую длину: $l(X_1) = 1$, $l(X_2) = 2$,…, $l(X_{n-1}) = n-1$.

Наименьшая верхняя граница длины полного множества ХП легко определяется из теоремы 1 как сумма $(n-1)$ членов арифметической прогрессии, то есть $l(X_c) \le n(n-1)/2$.

Как показано в [9] в экспериментах с автоматами, для которых не существует отличительных последовательностей, некоторые состояния могут идентифицироваться элементарными вход-выходными последовательностями. В этом случае начальное s -множество проверяемого автомата может включать не все множество состояний. Это обстоятельство позволяет сократить число ХП, требуемых для идентификации состояний начального s - множества, и сократить полную длину проверяющей последовательности.

Нижеследующая теорема определяет верхнюю границу такого диагностического эксперимента.

Теорема 2. Пусть начальное s -множество автомата A с n состояниями включает r состояний $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$, где $2 \le r \le n$. Тогда для r состояний существует минимальное множество не более, чем $(r-1)$ ХП, полная длина которых не превышает $(r-1)(2n-r)/2$ входных символов.

Доказательство. Пусть p -разбиения множества всех состояний автомата на блоки, представляющие k-эквивалентные классы состояний. На основании теоремы 1 очевидно, что p_1 состоит, по меньшей мере, из 2-х блоков разбиения с максимальным числом состояний в блоке $(n-1)$. Разбиение p_2 .состоит, по меньшей мере, из 3-х блоков с максимальным числом состояний в любом блоке $(n-2)$. Методом индукции можно определить, что для разбиения p_{n-r} число состояний в любом блоке может быть не более $(n-r)$ и максимальная полная длина входной последовательности, которая индуцирует это разбиение равна $1+2+...+(n-r)$. Таким образом, в худшем случае все подмножество r состояний $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$ может принадлежать $(n-r)$-эквивалентному классу состояний, объединенному в один блок p_{n-r} разбиения. Так как автомат минимальный, то входная последовательность длиной в $(n-r+1)$ символов будет индуцировать p_{n-r+1} разбиение r состояний, каждый из блоков которого содержит не более $(r-1)$ состояний. Этот процесс может продолжаться $(n-1)$ раз, пока не будет получено 0 -разбиение множества $\{z_1, z_2, ..., z_r\}$ состояний.

Полная длина последовательности вычисляется по формуле суммы арифметической прогрессии, которая равна:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = (n+1)(2a_0 + nd)/2 ,$$

где a_0 - первый член прогрессии; d - разность; $a_i = a_0 + id$.

Первый член прогрессии, определяющий полную длину характеристической последовательности, равен $a_0 = n - r + 1$. Учитывая, что индекс $"i"$ изменяется от 0 до $(r-2)$ и $d = 1$, получим

$$S_n = \sum_{i=0}^{r-2} a_i = (r-2+1)[2(n-r+1)+(r-2)/2 = (r-1)(2n-r)/2 .$$

Для иллюстрации теоремы рассмотрим автомат $A2$ (табл. 2), который не имеет отличительной последовательности.

Так как только состоянию z_2 автомата соответствует выходной символ 0, то идентифицировать это состояние можно элементарной вход-выходной последовательностью $X/Y = 1/0$.

Остается три состояния $\{z_1, z_3, z_4\}$, которые могут быть идентифицированы множеством характеристических последовательностей. По теореме 2 полная длина множества характеристических последовательностей для $n = 4$ и $r = 3$ равна $l(X_c) \le (r-1)(2n-r)/2 = 5$.

Характеристическое дерево для автомата $A2$ и начального s -множества $\{z_1, z_3, z_4\}$ приведено на рис. 2, из которого определяется $X_c = \{01{,}101\}$, так как произведение $p_{01} = \{\overline{z_1 z_3}, \overline{z_4}\}$, $p_{101} = \{\overline{z_1 z_4}, \overline{z_3}\}$ образует 0-разбиение $\{\bar{z}_1, \bar{z}_3, \bar{z}_4\}$.

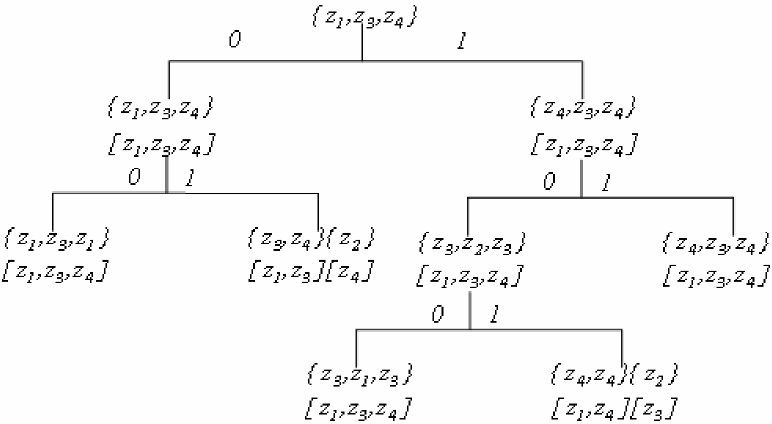

Рис. 2. Характеристическое дерево автомата $A2$

По теореме 2 число ХП не превышает $(r-1) = 2$ и полная длина $l(X_c) \le 5$. В соответствии с теоремой 2 $(r-1)$ и $(r-1)(2n-r)/2$. являются верхними границами числа ХП и полной длины автомата $A2$, эти оценки являются также наименьшими верхними границами.

Выводы. В статье представлена обобщенная процедура синтеза характеристических последовательностей по известной автоматной диаграмме дискретного устройства. Получена наименьшая верхняя граница длины множества ХП при условии, что начальное s -множество состояний является подмножеством всех состояний автомата.

Список литературы: **1**. *Гилл Н*. Введение в теорию конечных автоматов. - IV1.: Паука, 1966. - 272 с. **2**. *Богомолов А.М., Барашко А.С, Грунский И.О.* Эксперименты с автоматами. -К.: Наукова думка, 1973. - 144 с. **3.** *Богомолов А.М., Грунский И.О., Сперанский Д.В.* Контроль и преобразование дискретных автоматов. - К.: Жукова думка, 1975. - 174 с. **4.** *Тоценко В.Г.* Алгоритмы технического диагностирования дискретных устройств. – М.: Радио и связь. – 1985. –240с. **5.** ***Hennie E.G.*** Fault detection experiments for sequential circuits.- Proceeding of Fifth Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design, 1964, p.95-110. **6.** ***Kohavi Z.*** Switching and finite automata theory.- New York, Morgan Hill, 1970,- 592P. **7.** *Тоффоли Т., Марголус Н.* Машины клеточных автоматов. - М: Мир, - 1991. - 280с. **8**. *Евреинов Э.В., Прангишвили И.В.* Цифровые автоматы с настраиваемой структурой. -М.: Энергия, -1974. -240с. **9.** ***Tylaska T.T., Bargainer J.D.*** An improved bound for checking experiments that use simple input-output and characterizing sequences//IEEE Trans. Comput.- 1975.- C-24.- p.670-673. **10.** ***Hsieh E.P.*** Checking experiments for sequential machines// IEES Trans. Comput.- I974- H°I0.- C-20.- p.II52-II65. **11.** ***Friedman A.D., Menon P.R.*** Fault detection in digital circu-• its.- New Jersey: Prentica Hall, I97L- 220. **12.** *Дербунович Л.В., Бережная М.А., Королева Я.Ю., Рыжикова М.Г.* Синтез тестов для однородных структур // Информационно-управляющие системы на железнодорожном транспорте, Харьков. – 2008. - №4. – с.29-33. **13.** ***Fummi F., et al.*** Synthesis for Testability of Highly Complex Controllers by functional redundance removal // IEEE Transactions on Computers. – 1999. – Vol.18. – №12. – P. 1305–1355.

Поступила в редколлегию 18.11. 2008 г.